

# Mathex démonstration

Pierre<sub>Mrgl</sub>

February 2025

## Démonstration de Pierre Mergoil Lemme 2 Maths Expertes.

L'objectif de cette démonstration est de démontrer le lemme suivant (nous traiterons uniquement du sens  $\Rightarrow$ ):

Soient  $p \in \mathbb{N}$  un nombre premier,  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{Z}^*)^n$ .

$$p \mid \prod_{i=1}^n x_i \Rightarrow \exists i \in \llbracket 1; n \rrbracket \text{ tel que } p \mid x_i$$

Cela est équivalent à démontrer la contraposée de cette implication c'est à dire:  $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, p \nmid x_i \implies p \nmid \prod_{i=1}^n x_i$

Or d'après le lemme 1: si  $p$  est premier alors  $\forall a \in \mathbb{Z}, \text{pgcd}(a, p) = 1$  ou  $p \mid a$ .

On a ainsi l'équivalence  $p \nmid a \iff \text{pgcd}(p, a) = 1$

Ainsi,  $p$  étant premier:  $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, p \nmid x_i \iff \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \text{pgcd}(p, x_i) = 1$

$$\text{et } p \nmid \prod_{i=1}^n x_i \iff \text{pgcd} \left( \prod_{i=1}^n x_i, p \right) = 1$$

On veut donc prouver l'implication suivante pour tout entier  $n$ :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \text{pgcd}(x_i, p) = 1 \Rightarrow \text{pgcd} \left( \prod_{i=1}^n x_i, p \right) = 1$$

Soit la propriété  $P_n$ : " $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \text{pgcd}(x_i, p) = 1 \Rightarrow \text{pgcd} \left( \prod_{i=1}^n x_i, p \right) = 1$ "

Montrons par récurrence que  $P_n$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

Initialisation:

Pour  $n = 1$  la propriété est immédiate.

Hérédité:

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$  supposons que  $P_k$  est vraie, c'est à dire que:  $\forall i \in \llbracket 1; k \rrbracket, \text{pgcd}(x_i, p) \Rightarrow$

$$\text{pgcd}\left(\prod_{i=1}^k x_i, p\right) = 1.$$

$$\text{Montrons qu'alors } \forall i \in \llbracket 1; k+1 \rrbracket, \text{pgcd}(x_i, p) \Rightarrow \text{pgcd}\left(\prod_{i=1}^{k+1} x_i, p\right) = 1.$$

$$\text{D'après l'hypothèse de récurrence: } \text{pgcd}\left(\prod_{i=1}^k x_i, p\right) = 1$$

$$\text{et } \text{pgcd}(x_{k+1}, p) = 1.$$

Donc d'après le théorème de Bézout:  $\exists (a; b; c; d) \in \mathbb{Z}^4$  tel que

$$a \prod_{i=1}^k x_i + bp = 1 \quad (1)$$

$$\text{et } cx_{k+1} + dp = 1 \quad (2).$$

$$\text{Par produit membre à membre de 1 et 2: } \left(a \prod_{i=1}^k x_i + bp\right)(cx_{k+1} + dp) = 1$$

$$\iff ac \prod_{i=1}^{k+1} x_i + p(ad \prod_{i=1}^k x_i + bcx_{k+1} + bdp) = 1$$

$$\text{De plus, par somme et produit d'entier: } \left(ad \prod_{i=1}^k x_i + bcx_{k+1} + bdp; ac\right) \in \mathbb{Z}^2.$$

$$\text{Ainsi } \exists (u; v) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tel que } up + v \prod_{i=1}^{k+1} x_i = 1$$

$$\text{Donc d'après le théorème de Bézout: } \text{pgcd}\left(\prod_{i=1}^{k+1} x_i, p\right) = 1$$

Donc  $P_{k+1}$  est vraie.

Conclusion:

La propriété est initialisée pour  $n = 1$  et est héréditaire. Donc par le principe

$$\text{de récurrence } \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \text{pgcd}(x_i, p) = 1 \Rightarrow \text{pgcd}\left(\prod_{i=1}^n x_i, p\right) = 1$$

CQFD.